# Recurrencias y exponenciación de matrices

La exponenciación de matrices puede ser utilizada para calcular de forma eficiente el término n-ésimo de algunas recurrencias.

### Recurrencias lineares

Si la recurrencia es de la forma:

Para calcular el término n-ésimo una solución puede ser hacer iteraciones para calcular . Pero esto requiere operaciones.

Otra solución puede ser calcular la forma explícita de la recurrencia. Para esto necesitamos hallar las soluciones de la ecuación , lo cual en ocasiones puede que no sea viable, y en caso de serlo, quizás no nos sería de mucha ayuda debido a que los cómputos que hay hacer no son precisos y pudieran existir errores de redondeo. Este es el caso de algunas recurrencias como la de Fibonacci:

Notemos que estas recurrencias dependen de términos consecutivos para calcular el siguiente, pero vamos a ver cómo podemos expresar términos consecutivos en función de los términos consecutivos anteriores, o sea, calcular en función de :

Así que tenemos:

Sea

Por inducción podemos probar que:

#### Ejemplo

Para la recurrencia de Fibonacci:

Si queremos calcular calculando tendríamos el resultado. Para esto tenemos que calcular y luego multiplicar por , donde es una matriz cuadrada de tamaño , lo cual se puede hacer con la exponenciación logarítmica en multiplicaciones, así que si multiplicamos matrices de tamaño haciendo operaciones y la última multiplicación en , en total estaríamos haciendo operaciones

### Caso general

Si al mismo tiempo estamos trabajando con varias recurrencias que dependen de ellas entre sí:

Donde se cumple que cada dependencia involucra términos de estas recurrencias anteriores al n-ésimo y son los términos más pequeños involucrados de cada una de las recurrencias:

Mediante una idea similar podemos expresar:

Donde

#### Ejemplo:

donde es una constante.

Si consideramos la recurrencia entonces:

Así que:

#### Ejemplo

Para las recurrencias:

Tenemos:

Así que: